УДК 167.7
DOI 10.17726/philIT.2021.1.2

Правила, понимание и языковые игры в математике[1]

***Целищев Виталий Валентинович*,**
доктор философских наук, профессор,
научный руководитель Института философии и права СО РАН,
г. Новосибирск, Россия

leitval@gmail.com

Аннотация. Статья посвящена применимости правила Витгенгштейна в русле его философии математики к реальной математической практике. Отмечено, что в «Философских исследованиях» и «Замечаниях по основаниям математики» Витгенштейн прибегал к анализу довольно элементарных математических концепций, сопровождавшемуся присущими ему неясностью и неоднозначностью изложения. В частности, на этом фоне подвергнуты критике его радикальный конвенционализм, подмена логической необходимости «формой жизни» сообщества, а также неадекватность представления арифметических правил языковой игрой. Показано, что реконструкция витгенштейновской концепции понимания на основе фрегевского разделения смысла и референта выходит за рамки концептуального каркаса витгенштейновских языковых игр.

Ключевые слова: следование правилу; понимание; языковые игры; Витгенштейн; математика; радикальный конвенционализм; логическая необходимость.

Rules, understanding and language games in mathematics

Tselishchev Vitaly V.,
Deputy Director, Institute of Philosophy and Law,

Siberian Branch of Russian Academy of Science,
Novosibirsk, Russia

leitval@gmail.com

[1] Исследования, нашедшие отражение в данной статье, поддержаны РФФИ (грант 20-011-00723).

Abstract. The article is devoted to the applicability of Wittgenstein's following the rule in the context of his philosophy of mathematics to real mathematical practice. It is noted that in «Philosophical Investigations» and «Remarks on the Foundations of Mathematics» Wittgenstein resorted to the analysis of rather elementary mathematical concepts, accompanied also by the inherent ambiguity and ambiguity of his presentation. In particular, against this background, his radical conventionalism, the substitution of logical necessity with the «form of life» of the community, as well as the inadequacy of the representation of arithmetic rules by a language game are criticized. It is shown that the reconstruction of the Wittgenstein concept of understanding based on the Fregian division of meaning and referent goes beyond the conceptual framework of Wittgenstein language games.

Keywords: following the rule; understanding; language games; Wittgenstein; mathematics; radical conventionalism; logical necessity.

В литературе по философии математики в последнее время предпринимаются попытки придать новый оттенок дискуссиям о природе понимания доказательства, основываясь на идеях позднего Витгенштейна, в частности на его «Замечаниях по основаниям математики» [1]. Значительная доля сходных дискуссий была вызвана работой С. Крипке «Витгенштейн о правилах и индивидуальном языке» [2], который обращался к «одному и тому же базовому материалу» в «Философских исследованиях» [2]. При этом мода на тему о следовании правилу иногда превалирует как над более ранними оценками вклада Витгенштейна в понимание математической практики, так и над мнением самих работающих математиков. В этой связи представляет интерес одна из самых ранних реакций на появление «Замечаний» со стороны М. Даммита.

Время от времени Витгенштейн записывал в отдельных записных книжках мысли, приходившие ему в голову по поводу философии математики. Недавно опубликованные его «Замечания по основаниям математики» состоят из отрывков, выбранных редакторами из пяти таких книжек. Ни одна из них не была предназначена автором для публикации в виде книги. То обстоятельство, что они не могут рассматриваться в этом виде и, стало быть, критиковаться, неудивительно, хотя и вызывает разочарование. Многие мысли выражены в манере, которую сам автор признает неточной или неясной; одни пассажи противоречат другим; некоторые совершенно неубедительны; некоторые возражают тем идеям Витгенштейна, которые сами не очень ясно изложены в этой книге; другие пассажи, в частности о непротиворечивости и теоремах Геделя, плохого качества и содержат ошибки [4, с. 166].

Интерпретаторы «Замечаний» были вынуждены считаться со спецификой витгенштейновского изложения своих мыслей, отвечая на два вопроса: каковы на самом деле были взгляды Витгенштейна? в какой степени они могут мотивировать интересные взгляды, которые не совпадают с его собственными взглядами? Если реконструкция С. Крипке отвечала на первый вопрос, второй из них является не менее любопытным. В частности, интересна концепция логической необходимости в свете радикального конвенционализма Витгенштейна.

Рассмотрим иллюстрацию действия такого конвенционализма на простом примере.

Пусть имеется последовательность целых чисел

$$1,\quad 4,\quad 9,\quad 16,\ \ldots$$

Если человеку, знакомому с элементарной математикой, задать вопрос, что будет следующим числом, ответ, наверняка, будет 25. Чем при этом руководствуется отвечающий? Очевидно, он имеет в виду, что представленная последовательность образуется согласно правилу возведения в квадрат каждого числа, а именно

$$12,\quad 22,\quad 32,\quad 42,\quad 52,\ \ldots$$

Витгенштейновский скептик вопрошает, почему именно это правило применено в данном случае, ведь есть и другие варианты, которые дают одинаковый с первым примером результат на первых четырех числах, но расходятся на пятом. Действительно, правило может быть более «вычурным»: последовательность растет как добавление последовательности простых чисел к элементам исходной последовательности. Последовательность простых чисел

$$3,\quad 5,\quad 7,\quad 11,\quad 13,\quad 17,\ \ldots$$

Тогда мы порождаем последовательность

$$1,\quad 4,\quad 9,\quad 16,\quad 27(?),\ \ldots$$

Последовательность, сконструированная возведением в квадрат целых чисел, отличается от новой последовательности на 5-м знаке. Легко видеть, почему:

$$1, \quad 4 = 1 + 3, \quad 9 = 4 + 5, \quad 16 = 9 + 7, \quad 16 + 11 = 27$$

И тогда возникает вопрос, какое из решений (с использованием возведения в квадрат или с использованием простых чисел?) является «правильным». И если один правилен, то в каком смысле другой «неправилен»? Вообще говоря, нет ничего такого, что говорило бы в пользу того или иного ответа, кроме как намерения. Более естественным выглядит пример с возведением в квадрат, но это не играет роли в вынесении вердикта «правилен» или «неправилен». У нас налицо использование двух правил, которым мы следовали при конструировании последовательностей, и тогда вопрос о правильности или неправильности переходит в сферу оценки правил. Можно ли отдать предпочтение одному из правил, а если можно, то на каких основаниях?

Согласно Витгенштейну, на каждом шаге допустим выбор иного правила, которому надо следовать. Искусственный характер этого примера говорит сам за себя, потому что он «неестественен» на практике. С логической точки зрения, которая допускает все возможности, допустимы и неестественные, в этом смысле должен быть принят во внимание более общей каркас: проходит ли наше рассуждение о радикальном конвенционализме в свете натуралистического взгляда на математику, где «естественность» является природным фактором, отражающимся в практике. Именно здесь видна неопределенность вердиктов в отношении витгенштейновской мысли: он не находит обоснования процедуры выбора и говорит о том, что мы делаем выбор, определяемый «формой жизни». Другими словами, математики играют в определенную языковую игру, в которой некоторые правила более «естественны», чем другие. Это вполне совместимо с одним из главнейших тезисов Витгенштейна, согласно которому объяснение должно быть заменено описанием. Так что вместо обоснования или объяснения выбора правила мы лишь фиксируем, что делаем это в рамках принятой игры.

При таком произволе трудно придать какой-то смысл концепции логической необходимости, которая свойственна математическим утверждениям. И Витгенштейн находит этому оправдание, заключающееся в коренном различии логической и математической техники: «Пагубное проникновение» логики в математику… Порочность логической техники состоит в том, что она заставляет забыть специальную математическую технику. В то время как логическая техника – лишь вспомогательная техника в математике…» [1, с. 153].

Говорит ли это о том, что единственным оправданием «естественного» выбора в математическом мышлении является некоторого рода логический резон, который Витгенштейн не одобряет? В этом смысле логика должна, по его мнению, уступать место правилам языковой игры. Этот, по сути, важный аспект упускается из виду. В самом деле, справедливо полагает Я. Хакинг: «Я подозреваю, что одна из причин того, что у людей сегодня так много проблем с «Замечаниями по основаниям математики», заключается в том, что некоторые из центральных вопросов в них выпали из сегодняшнего портфолио проблем. Я считаю, что хотя он [Витгенштейн] едва ли использовал слово «необходимость», связанные с ним проблемы были центральными для многих математических размышлений Витгенштейна в 1938-1944 гг. – и, на самом деле, на протяжении всей его жизни» [5, с. 145].

Концепция логической необходимости противостоит произволу радикального конвенционализма, и по этой причине оправдание витгенштейновского подхода к математике должно заключаться в ослаблении этой концепции. Такое оправдание Витгенштейна можно найти у Б. Страуда: «Логическая необходимость не представляет собой нечто подобное рельсам, устремляющимся в бесконечность, и вынуждающее нас следовать одним и тем же путем; но и неверно полагать, что она нас вообще не вынуждает. Скорее, это рельсы, по которым мы уже проезжали, и мы можем продолжить их за пределы определенной точки способом, зависимым от того, что уже существует. Для того чтобы двигаться по направляющим рельсам, они должны быть продолжены плавными и естественными способами; как их продолжать – зависит от степени, в какой путь будет определяться уже продолженными рельсами» [6, с. 496].

Если этот пассаж подтверждает точку зрения Витгенштейна, то «рельсы» являются полным аналогом принятой языковой игры. Но здесь возникает вопрос, что является резоном в принятии именно этой, а не другой, языковой игры. В другой терминологии, это вопрос о «правиле правил». Очевидно, что выбор самих языковых игр не является конвенциональным выбором. Именно по этой причине Витгенштейн выбирает предельно простые арифметические выражения, поскольку в более сложных случаях ситуация становится для него непонятной.

Более знакомый пример (языковой игры) обеспечивается правилами элементарной арифметики, использование которых в приложениях опосредуется языковой игрой в счет. Эта конкретная связь между формальными операциями и их конкретной значимостью была, конечно, известна Витгенштейну. Но несмотря на то, что Витгенштейн активно искал такие способы конкретного прагматического значения в различных случаях, он не преуспел в случае других правил, не говоря уже о формальных играх, столь важных для него, таких как формальное доказательство теорем в логике и математике [7, с. 64].

Упоминание в цитате Хинтикки слов «доказательство» следует подчеркнуть уже потому, что это понятие лежит в основе витгенштейновского «скептического подхода». Если мы не знаем, какому именно правилу мы следуем (или должны следовать), что происходит при доказательстве математического выражения? Все, что я говорю, сводится, собственно, к тому, что можно знать некоторое доказательство и понимать, следовать ему шаг за шагом, но при этом все-таки не *понимать* того, что было доказано. А это, в свою очередь, связано с тем, что можно грамматически правильно построить математическое предложение, не понимая его смысла [1, с. 154].

Сомнения Витгенштейна в том, что понимание имеет какое-либо отношение к доказательству, не только удивительно в контексте математической практики, но удивительно и с точки зрения нашего понимания самой концепции «понимания». ««Понимать» – это смутное выражение», – говорит Витгенштейн и продолжает намекать на то, что в принятии доказательства лежит нечто большее, чем следование принятому правилу, поскольку есть множество альтернативных правил.

Разве не абсурдно говорить, что смысл последней теоремы Ферма непонятен? И можно ответить: математики ведь *вовсе не* обескуражены в отношении нее. Во всяком случае, они все-таки пробуют применить известные методы доказательства; и поскольку используются эти методы, постольку они понимают это предложение. Но правильно ли это? Понимают ли они не столь всеобъемлюще, насколько ее можно понимать? [8, с. 237].

В основе подобного взгляда лежит тотальное отвержение платонизма, согласно которому доказательство уже существует и математик только открывает его. При такой позиции конвенционализм на «каждом шаге» доказательства не проходит и, по выражению М. Даммита, позицию Витгенштейна трудно переварить. Более благоприятной для Витгенштейна метафоре рельсов Страуда Даммит противопоставляет жесткую позицию необходимого характера доказательства: «Предполагается, что доказательство имеет целью убедить нас, вынудить нас считать такую-то и такую-то форму слов неотразимо истинной, или же исключить такую-то и такую-то форму слов из нашего языка… Мы естественно полагаем, что при встрече с доказательством у нас нет иной альтернативы, как принять доказательство, если мы придерживаемся понимания тех выражений, которые уже содержатся в нем. Для Витгенштейна принятие теоремы есть принятие нового правила языка, и отсюда наши концепции не могут оставаться неизменными до конца доказательства. Но мы могли бы отвергнуть доказательство, оставаясь верными концепциям, с которых начинали… Мы хотим сказать, что не знаем, на что было бы похоже, если бы человек, по обычным критериям, уже понял используемые концепции и при этом отвергнул доказательство… Примеры, данные Витгенштейном в книге, – удивительно для него – скудны и неубедительны» [4, с. 173].

Существующие полярные мнения о плодотворности подхода Витгенштейна к анализу следования правилу в математической практике, и в частности к соотношению доказательства и его понимания, могут быть смягчены некоторого рода компромиссом. Смысл его состоит не в том, чтобы подправить каким-либо образом неприемлемый радикальный конвенционализм Витгенштейна, приводящий к равно неприемлемому скептицизму, а том, чтобы «в духе» Витгенштейна выработать приемлемую для работающих математиков и философов математики концепцию понимания.

Дж. Браун предложил эксплицировать понимание или смысл правила таким образом, чтобы оно совмещало как собственно витгенштейновский подход, так и платонизм в духе Г. Фреге. Последний важен в плане его различения смысла (sense) и референта (reference) в применении к правилу. Скажем, референт выражения «последовательность n^2» есть множество упорядоченных пар с бесконечным количеством членов. А вот смысл этого выражения есть модус представления этих членов. В нашем случае лучше говорить не о смысле и референте, а о сходных терминах интенсионала и экстенсионала множества. Правило порождения последовательности относится к интенсионалу порождаемого множества. Это означает, что понимание правила есть понимание его интенсионала, то есть свойства всех порождаемых членов.

Возникающая в этой связи проблема состоит в том, в какой степени постижение или понимание правила зависит от его сложности. Витгенштейна можно рассматривать как утверждающего дуальный подход: либо мы понимаем правило, либо нет. На самом деле, сложность правила является гораздо более изощренной, и даже не в психологическом плане, концепцией.

Примером тотально непонятного правила в порождении последовательности может служить «по-настоящему» случайная последовательность чисел, например,

0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 …

С точки зрения обычного словоупотребления, здесь нет никакого правила. Но с более обдуманной точки зрения всякая последовательность имеет правила порождения ее членов, и если мы не можем дать краткой формулы (это и есть «простое» правило), то можно задать другим путем. Любой путь содержит определенное число битов информации. Тогда можно считать последовательность случайной, если правило порождения ее информационно больше, чем сама последовательность. Проблема состоит в том, что в случае сложных правил трудно догадаться, в чем оно заключается. Д. Хофштадтер приводит следующий пример с двумя последовательностями

7, 8, 5, 3, 9, 8, 1, 6, 3, 3, 9, 7, 4, 4, 8, 3, 0, 9, 6, 1, 5, 6, 6, 0, 8, 4 …

1, -1/3, +1/5, -1/7, +1/9, -1/11, +1/13, -1/15 …

Это хороший пример действительно сложного правила, которое выглядит следующим образом: первая последовательность есть просто начало десятичного разложения суммы второго, которая равна $\pi/4$ [9, с. 408].

Это иллюстрация сложного, но все-таки постижимого правила. Витгенштейн же прибегал к гораздо более простым примерам из элементарной арифметики, которые вовсе исключали сложность правила, но апеллировал при этом к общей проблеме скептицизма при следовании правилу. В этом смысле аргументация Витгенштейна не является правдоподобной. Но суть этой аргументации можно сохранить, если мы вводим в рассмотрение сложные правила. Браун предлагает сравнить расширение последовательности n^2 с расширением в соответствии с некоторым правилом, основанным на вычислениях, вовлеченных в доказательство теоремы четырех красок, с каждым последующим элементом последовательности ассоциируется все большее мастерство в доказательстве теоремы. Правило при этом становится абсурдно сложным [10, с. 155].

Далее представим бесконечно сложное правило в действии. На каждом новом этапе порождения последовательности нам будет трудно уследить, как оно применяется, поскольку это связано, скажем, с перебором огромного числа комбинаторных возможностей, что имеет место в случае теоремы о четырех красках. В этом случае наше понимание будет лишь частичным и, в некотором предельном случае, мы не сможем вообще подразумевать, чем будет следующий член последовательности. Тогда в каком-то смысле радикальный конвенционализм Витгенштейна можно с натяжкой приравнять к случаю сложного правила. Другими словами, понимание правила порождения последовательности не уйдет далеко от витгенштейновского произвольного выбора.

Правда, можно будет возразить на это, что по Витгенштейну вряд ли сообщество математиков играет в такие языковые игры, которые крайне искусственны. Но с другой стороны, такими же искусственными выглядят примеры самого Витгенштейна, основанные на соображениях с самыми элементарными арифметическими концепциями.

Наконец, важным остается вопрос о соотношении собственно правил и языковых игр. Последняя гораздо более фундаментальна по сравнению с правилами, поскольку она не определяется правилами. Языковой игре научаются путем «натаскивания» в стиле «делай как я». В этом смысле постижение правила, которому надо следовать, является вторичной проблемой, потому что в конечном счете математик предпочитает при расширении последовательности «обычную» для него языковую игру, при которой последовательность 1, 4, 9, 16, … порождается «обычным» образом как n^2, а не каким-то «экзотическим» путем, в силу тренировки, обучения и следования не правилу, а установкам математического сообщества.

Но и эти установки математического сообщества включают в себя не простые концепции, вроде сложения, используемые Витгенштейном, а гораздо более развитую символическую систему, не вмещающуюся в каркас поисков Витгенштейном природы правил. Как отмечает Я. Хинтикка, «…хотя арифметическое исчисление «игр», которые Витгенштейн часто использует в качестве примеров, и включает правила на запоминание, вроде таблиц умножения, такие правила не исчерпывают того, что происходит в арифметике. Например, там важны абстрактные правила типа коммутативности и ассоциативности, и они не могут быть сведены к слепому следованию правилам» [7, с. 79].

Похоже, сам Витгенштейн понимал эту ситуацию в достаточной степени, о чем свидетельствует следующий пассаж: «Математик непременно придет в ужас от моих математических замечаний, так как его всегда учили избегать таких мыслей и сомнений, какие возникают у меня. Он научился относиться к ним как к чему-то презренному и… приобрел отвращение к ним как к инфантильным. То есть я перечисляю все проблемы, которые ребенок, изучающий арифметику и т.д., находит трудными, проблемы, которые образование подавляет, не решая. Я говорю этим подавленным сомнениям: вы совершенно правы, продолжайте спрашивать, требуйте разъяснений!» [11, с. 381].

При этом мы находимся в раздвоенном состоянии: с одной стороны, нас обучают языковой игре в почтении к философии математики Витгенштейна, с другой стороны, мы должны осознавать, следуя Хакеру, что «размышления Витгенштейна о математике являются «наименее влиятельной и наименее понятной» частью его более поздней философии» [12, с. 295]. В конечном счете, философия математики Витгенштейна радикально выходит за рамки дискуссий по существенным вопросам этой дисциплины.

Литература

1. *Витгенштейн Л.* Замечания по основаниям математики (пер. М.С. Козловой, Ю.А. Асеева) / Философские работы. Часть II. Книга I. – М.: Гнозис, 1994.
2. *Крипке С.* Витгенштейн о правилах и индивидуальном языке (пер. В.А. Ладова и В.А. Суровцева). – М.: Канон+, 2010. (*Kripke S.* Wittgenstein o pravilakh I individualnom jazyke [Wittgenstein on rules

and private language]. – M.: Kanon+, 2010.)
3. *Витгенштейн Л.* Философские исследования (пер. М.С. Козловой, Ю.А. Асеева) / Философские работы. Часть I. – М.: Гнозис, 1994. (*Wittgenstein L.* Filosofskije issledobanija [Philosophical Investigations]. – M.: Gnosis, 1994.)
4. *Dummett M.* Wittgenstein's Philosophy of Mathematics // Truth and Other Enigmas. – Harvard: Cambridge University Press, 1978. – P. 166-185.
5. *Хакинг Я.* Почему вообще существует философия математики? (пер. В.В. Целищева). – М.: Канон+, 2020. (*Hacking J.* Pochemu voobshche sushchestvuet filosofija matematiki [Why there is philosophy of mathematics at all]. – M.: Kanon+, 2020.)
6. *Stroud B.* Wittgenstein and Logical Necessity // Wittgenstein / ed. Pitcher G. – N.Y.: Doubleday, 1966. – P. 496.
7. *Хинтикка Я.* О Витгенштейне (пер. В.В. Целищева). – М.: Канон+, 2013. (*Hintikka Y.* O Wittgensteine [On Wittgenstein]. – M.: Kanon+, 2013.)
8. *Витгенштейн Л.* Замечания по основаниям математики. Раздел VI (1943-1944 гг.) (пер. В.А. Суровцева) / Хинтикка Я. О Витгенштейне, с. 225-271. – М.: Канон+, 2013. (*Wittgenstein L.* Zamechnija po osnovanijam matematiki [Remarks on Foundations of Mathematics]. Chast VI // Hintikka Y. O Witgensteine [On Wittgenstein]. – M.: Kanon+, 2013.)
9. *Hofstadter D.* Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid. – Stanford Terrace: Harvester Press, 1979.
10. *Brown J.* Philosophy of Mathematics: A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures. – N.Y.: Routledge.
11. *Wittgenstein L.* Philosophical Grammar. – Oxford: Basil Blackwell, 1974 / ed. Rush Rhees, translated by Anthony Kenny.
12. *Hacker P.* Wittgenstein's Place in Twentieth-Century Analytic Philosophy. – Blackwell, 1996.